

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ**

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(ДГТУ)**

Факультет Технология машиностроения

Кафедра Технологии формообразования и художественная обработка материалов

Составитель: доцент кафедры ТФиХОМ Церна И.А.

**ЛЕКЦИИ**

по дисциплине

«Математическое моделирование технических объектов»

(основное краткое содержание)

Ростов-на-Дону

2024

**Тема 1. «Моделирование и модели»**

**Развитие моделирования как метода познания**

Моделирование является способом изучения объектов познания на их [*моделях*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/077/392.htm) с построением и изучением моделей реально существующих предметов и явлений (живых и неживых систем, инженерных конструкций, разнообразных процессов — физических, химических, биологических, социальных) и конструируемых объектов (для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов их построения и т. п.).

Моделирование как познавательный приём неотделимо от развития знания. По существу, моделирование как форма [*отражения*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/085/793.htm) действительности зарождается в античную эпоху одновременно с возникновением научного познания. Однако в отчётливой форме (хотя без употребления самого термина) моделирование начинает широко использоваться в эпоху Возрождения; [*Брунеллески*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/001/545.htm)*,* [*Микеланджело*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/076/300.htm) и другие итальянские архитекторы и скульпторы пользовались моделями проектируемых ими сооружений; в теоретических же работах Г. [*Галилея*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/008/161.htm) и [*Леонардо да Винчи*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/069/674.htm) не только используются модели, но и выясняются пределы применимости метода моделирование.

*И.* [*Ньютон*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/082/927.htm) пользуется этим методом уже вполне осознанно, а в 19—20 веках трудно назвать область науки или её приложений, где моделирование не имело бы существенного значения.

Исключительно большую методологическую роль сыграли в этом отношении работы Кельвина, Дж. [*Максвелла*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/072/911.htm)*, Ф.* А. [*Кекуле*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/060/511.htm)*,* А. М. [*Бутлерова*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/002/259.htm) и других физиков и химиков — именно эти науки стали, можно сказать, классическими «полигонами» методов моделирования.

Появление же первых электронных вычислительных машин (Дж. [*Нейман*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/080/858.htm)*,* 1947) и формулирование основных принципов [*кибернетики*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/060/914.htm) (Н. [*Винер*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/005/108.htm)*,* 1948) привели к универсальной значимости новых методов — как в абстрактных областях знания, так и в их приложениях. Моделирование ныне приобрело общенаучный характер и применяется в исследованиях живой и неживой природы.

**Понятия и определения**

**Модель** в общем смысле есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, материальной системы либо описания знаковыми средствами), отражающий свойства, характеристики и связи объекта-оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом.

**Моделирование** – процесс как создания, так и использования модели.

**Цели моделирования:**

* познание действительности;
* проведение экспериментов;
* проектирование и управление;
* прогнозирование поведения объектов;
* тренировка и обучения специалистов;
* обработка информации.

### Общие свойства моделей

1. **Конечность:** модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования конечны;

2. **Упрощенность:** модель отображает только значимые стороны объекта;

3. **Приблизительность:** действительность отображается моделью приблизительно;

4.·**Адекватность:** степень успешности описания моделью объекта моделирования;

5. **Информативность:** модель должна содержать достаточную информацию о системе в рамках гипотез, принятых при построении модели.

**Классификация моделей**

Каждая модель характеризуется тремя признаками:

1) принадлежностью к определённому классу задач (по классам задач);

2) указанием класса объектов моделирования (по классам объектов);

3) способом реализации (по форме обработки информации).

Рассмотрим более подробно последний вид классификации. По этому признаку модели делятся на материальные и идеальные.

**Материальные модели**:

1.1 геометрически подобные масштабные (далее геометрические);

1.2 основанные на теории подобия (далее физические);

1.3 аналоговые приборные (далее аналоговые).

*Геометрические модели* воспроизводят в масштабе пространственно-геометрические характеристики оригинала безотносительно его субстрату (макеты зданий и сооружений, учебные муляжи и др.)

*Физические модели* основаны на теории подобия и воспроизводят с масштабированием в пространстве и времени свойства и характеристики оригинала той же природы, что и модель, (гидродинамические модели судов, продувочные модели летательных аппаратов). Например, для морского судна правильный выбор обводов, подбор гребного винта и согласование с характеристиками винта и корпуса мощности и скорости вращения вала является важнейшей задачей. Решение проблемы опытным путем невозможно по экономическим соображениям, не поддается она и теоретическому решению. Выход можно найти на пути синтеза теории масштабного гидродинамического моделирования, т.е. экспериментальное исследование малых геометрически подобных моделей проектируемых судов в специальных бассейнах на основе теории подобия.

*Аналоговые модели* воспроизводят исследуемые свойства и характеристики объекта оригинала в моделирующем объекте другой природы на основе некоторой системы прямых аналогий (разновидности электронного аналогового моделирования). Аналоговое моделирование основано на том, что свойства и характеристики некоторого объекта воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы.

**Идеальные модели**

2.1 неформализованные – модели как системы представлений об объекте-оригинале, сложившиеся в человеческом мозгу;

2.2 частично формализованные:

2.2.1 вербальные – текстовое описание объектов и процессов, текстовые материалы проектной документации, словесное описание результатов технического эксперимента;

2.2.2 графические иконические – художественная графика, технологические карты, реально или хотя бы теоретически доступные непосредственно зрительному восприятию;

2.2.3 графические условные – данные наблюдений и экспериментальных исследований в виде графиков, диаграмм, схем;

2.3 вполне формализованные (математические) модели.

*Математические модели* (ММ) отличаются от остальных свойством вариативности – возможностью кодирования одним *знаковым описанием* огромного количества конкретных вариантов поведения системы. Так, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами описывают и движение массы на пружине, и изменение тока в колебательном контуре и ряд других процессов. Однако важнее то, что в каждом из этих описаний одни и те же уравнения в буквенном и в числовом виде соответствуют бесконечному числу комбинаций конкретных значений параметров. Скажем, для процесса механических колебаний – это любые значения массы и жесткости пружины.

*Знаковые модели* обеспечивают дедуктивный вывод свойств, количество следствий в них обычно более значительно, чем в моделях других типов. Они отличаются компактной записью удобством работы, возможностью изучения в форме, абстрагированной от конкретного содержания. Все это позволяет считать знаковые модели наивысшей ступенью и рекомендовать стремиться к такой форме моделирования.

**Тема 2. «Физическое моделирование»**

Физическое моделирование используется в тех случаях, когда модель и моделируемый объект имеют одну и ту же физическую природу.

Физическое моделирование — метод экспериментального изучения различных физических явлений, основанный на их физическом подобии.

**Условия применения метода** физического моделирования:

* исчерпывающе точного математического описания явления на данном уровне развития науки не существует, или такое описание слишком громоздко и требует для расчётов большого объёма исходных данных, получение которых затруднительно.
* воспроизведение исследуемого физического явления в целях эксперимента в реальных масштабах невозможно, нежелательно, или слишком дорогостояще. (Например, [цунами](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D1%83%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8)).

**Примеры применения метода** физического моделирования:

* исследование течений газов и обтекания [летательных аппаратов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BF%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%B0%D1%82), автомобилей, и т.п. в [аэродинамических трубах](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%8D%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B1%D0%B0).
* гидродинамические исследования на уменьшенных моделях кораблей, гидротехнических сооружений и т.п.
* исследование сейсмоустойчивости зданий и сооружений на этапе проектирования.
* изучение устойчивости сложных конструкций, под воздействием сложных силовых нагрузок.
* измерение тепловых потоков и рассеивания тепла в устройствах и системах, работающих в условиях больших тепловых нагрузок.
* изучение стихийных явлений и их последствий.

**Сущность метода** физического моделирования состоит в создании лабораторной *физической модели* явления в уменьшенных масштабах, и проведении [экспериментов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82) на этой модели. Выводы и данные, полученные в этих [экспериментах](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82), распространяются затем на явление в реальных масштабах. Метод может дать надёжные результаты, лишь в случае соблюдения *физического подобия* реального явления и модели.

Подобие достигается равенством для модели и реального явления значений [критериев подобия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D1%8F) — безразмерных чисел, зависящих от физических (в том числе геометрических) параметров, характеризующих явление. Экспериментальные данные, полученные методом физического моделирования распространяются на реальное явление также с учётом [критериев подобия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B8_%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D1%8F).

**Критерий подобия** — [безразмерное (отвлечённое) число](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%91%D0%B5%D0%B7%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE&action=edit&redlink=1), составленное из размерных [физических](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0) [параметров](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0), определяющих рассматриваемое физическое явление. Равенство всех однотипных критериев подобия для двух физических явлений и систем — необходимое и достаточное условие физического подобия этих систем.

Каждый из критериев подобия имеет свой физический смысл как величина, пропорциональная отношению однотипных физических величин.

*Критерий в теоретической механике*

Критерий подобия механического движения получается из уравнения, выражающего [второй закон Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B9_%D0%B7%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), и называется [числом Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0):

Ne = \frac {F \cdot t^2}{m \cdot l}

где ~F — действующая на тело сила, ~m — его [масса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B0), ~t — время, ~l — характерный линейный размер.

*Критерии в теории упругости*

При изучении [упругих деформаций](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BF%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%B0%D1%8F_%D0%B4%D0%B5%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) [конструкции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) под действием внешних сил основными критериями подобия являются [коэффициент Пуассона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%83%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) для материала конструкции:

 и критерии   ,

где  — относительная продольная деформация,

 — относительная поперечная деформация,

*Е* — [модуль Юнга](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D1%83%D0%BB%D1%8C_%D0%AE%D0%BD%D0%B3%D0%B0),

*ρ* – плотность материала конструкции;

*F* — характерная внешняя сила,

*g* — ускорение силы тяжести.

Каждый из критериев подобия имеет определенный физический смысл как величина, пропорциональная отношению однотипных физических величин.

**Тема 3. «Математическое моделирование»**

**Понятия и величины математического моделирования**

Математическое (логико-математическое) моделирование является важнейшим видом ***знакового моделирования***, которое предполагает использование моделей в виде знаковых образований какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, графы, слова и предложения в некотором алфавите (естественного или искусственного языка) (см. [*Знак*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/047/595.htm)*,* [*Семиотика*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/101/166.htm))*.*

Оно осуществляется средствами языка математики и логики (см. [*Математическая модель*](http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/074/313.htm))*.* Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул, преобразования состояний элементов цифровой машины, соответствующих знакам машинного языка, и др.).

Математическая модель сложных управляемых процессов содержит очень много величин различной природы. Все эти величины естественным образом можно разделить на три группы:

1) эндогенные (внутренние) или фазовые величины, являются искомыми, т. е. подлежат определению, вычислению в рамках данной модели;

2) экзогенные (внешние) величины, полагаются известными в рамках данной модели;

3) управляющие величины, находятся в распоряжении органов управления, с помощью которых можно оказать влияние на течение процесса.

Само слово «модель» означает совокупность связей между всеми этими величинами. Если эта совокупность связей позволяет определить на данном отрезке времени все эндогенные величины при условии, что на нем заданы управления, экзогенные величины, а также начальные для этого отрезка (и, возможно, граничные – в пространственном смысле) значения фазовых переменных, то модель называется замкнутой.

Разделение на внешние и внутренние величины является условным и связано со способом использования модели и целями моделирования.

**Определения математического моделирования**

Никакое [определение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) не может в полном объёме охватить реально существующую [деятельность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D1%8F%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) по математическому моделированию. Однако определения полезны как попытка выделить наиболее существенные черты.

Примером достаточно общего определения математического моделирования и математической модели является определение [А.А.Ляпунов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%8F%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B9_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87)а:

[*Моделирование*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система ([модель](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C)), которая:

* находится в некотором объективном соответствии с [объектом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%BA%D1%82) анализа;
* способна замещать познаваемый [объект](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%BA%D1%82) в определенных отношениях;
* дает при её исследовании [информацию](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) о самом моделируемом объекте.[[1]](http://ru.wikipedia.org/wiki/Математическое_моделирование#cite_note-0#cite_note-0)

Примером наиболее лаконичное определение математической модели является определение: [*уравнение*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)*, выражающее* [*идею*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B4%D0%B5%D1%8F)*.*

**Формальная классификация математических моделей**

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств и часто строится в форме дихотомий. Один из популярных наборов дихотомий полагает, что каждая построенная модель является линейной или нелинейной, непрерывной или дискретной и т.д.:

* [Линейные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) или [нелинейные модели](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B);
* [Сосредоточенные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8B%D0%BA%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) или [распределённые](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D1%85);
* [Непрерывные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%88%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B0) или д[искретные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0);
* [Статические](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) или [динамические](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0_(%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0));
* [Детерминированные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) или [стохастические](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%BE%D1%85%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

Естественно, возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом — распределённые модели и т.д.

*Линейные и нелинейные модели*

**Линейная система** — любая система, в которой отклик на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие. В математической модели линейной системы это означает, что оператор преобразования "вход-выход" линеен. Иногда линейное свойство системы называют [принципом суперпозици](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BF_%D1%81%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B8).

Свойства линейных систем

1. Порядок установки линейных систем не влияет на сигнал результата.
2. Любая сложная система будет линейна, если составлена из линейных систем и блоков суммирования.
3. Перемножение сигнала на константу является линейной операцией, а перемножение двух сигналов — нелинейной.

**Нелинейная система** — [динамическая система](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0), в которой протекают процессы, описываемые нелинейными [дифференциальными уравнениями](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

Некоторые виды нелинейных звеньев:

1. звено релейного типа
2. звено с кусочно-линейной характеристикой
3. звено с криволинейной характеристикой любого сочетания
4. звено, уравнение которого содержит произведение переменных или их производных и другие их комбинации
5. нелинейное звено с запаздыванием
6. импульсное звено
7. логическое звено

Многие нелинейные системы в области малых изменений параметров поддаются [линеаризации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F).

*Сосредоточенные и распределенные модели*

**Сосредоточенность или распределенность** характеризуют объекты с точки зрения их пространственной протяженности.

Если пространственной протяженностью объекта можно пренебречь и считать, что независимой переменной является только время протекающих в нем процессов, принято говорить об объектах с сосредоточенными параметрами. Они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. К ним относится большинство механизмов, машин и локальных технических устройств (расстояния между компонентами практически не влияют на их свойства).

Описание пространственно протяженных объектов требует учета не только времени, но и пространственных координат. В таком случае говорят о классе объектов с распределенными параметрами: длинные трубопроводы и технологические линии в непрерывном пространстве. Электромагнитное поле с его обобщенной математической моделью – уравнениями Максвелла – представляет классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами. Непрерывные и детерминированные объекты с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

*Непрерывные и дискретные модели*

**Непрерывными** (континуальными) называют объекты, переменные которых (включая и время) могут принимать множество сколь угодно близких друг к другу значений. Большинство реальных физических и теоретических объектов, состояние которых характеризуется только макроскопическими физическими величинами (температура, давление, скорость, ускорение, сила тока, напряженность электрического или магнитного полей и т.д.) обладают свойством непрерывности. При их модельном описании используется главным образом, аппарат дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

**Дискретными** называют объекты, переменные которых могут принимать некоторое, практически всегда конечное число наперед известных значений. Примеры: релейно-контактные переключательные схемы, коммутационные системы АТС. Основой формализованного описания дискретных объектов является аппарат математической логики (логические функции, аппарат булевой алгебры, алгоритмические языки). С развитием ЭВМ дискретные методы анализа широко используются и для описания и исследования непрерывных объектов.

Дискретность модели может быть, как естественным условием (система скачкообразно меняет свое состояние и выходные свойства), так и искусственно внесенной особенностью. Типичный пример последнего – замена непрерывной математической функции на набор ее значений в фиксированных точках.

*Статические и динамические модели*

**Статические** модели относятся к объектам, практически неизменяющимся во времени или рассматриваемым в отдельные временные сечения.

**Динамические** модели воспроизводят изменения состояний («движение») объекта с учетом как внешних, так и внутренних факторов.

Для динамических моделей вводят понятия стационарность и нестационарность. Стационарность выражается в неизменности во времени некоторых физических величин: потока жидкости с постоянной скоростью, механической системы, в которой силы зависят только от координат и не зависят от времени.

Под стационарным объектом, в более общем смысле, подразумевают неизменность структуры и параметров объекта. Поэтому он описывается выражением, которое включает в себя только постоянные коэффициенты.

Нестационарность может иметь место относительно параметров, относительно структуры и одновременно. Чаще имеет место нестационарность относительно параметров, т.е. рассматривается объект с переменными коэффициентами, что усложняет исследование. Общей теории и специального математического аппарата для описания существенно нестационарных объектов переменной структуры еще не существует. Исследование таких объектов проводится на основе некоторых методов прикладного системного анализа, которые сочетают формализованные математические процедуры с эвристикой и здравым смыслом.

*Детерминированные и стохастические модели*

Одной из характерных особенностей функциональной математической модели является наличие или отсутствие среди ее параметров случайных величин. При наличии таких величин ММ называют ***стохастической***, а при их отсутствии – ***детерминированной*** (от латинского слова *determino* – определяю).

***Детерминированные*** математические модели описывают поведение объекта с позиций полной определенности в настоящем и будущем. Примеры таких моделей: формулы физических законов, технологические процессы обработки деталей и т.д.

Далеко не все параметры реальных технических объектов можно характеризовать вполне определенными значениями. Поэтому ММ таких ТО, строго говоря, следует отнести к ***стохастическим***. Например, если изучаемый ТО является изделием массового производства и его *внутренние параметры* могут принимать случайные значения в пределах допусков, установленных относительно номинальных значений, то и *выходные параметры* ТО будут случайными величинами. Случайными могут быть и значения *внешних параметров* при воздействии на ТО таких факторов, как порывы ветра, турбулентные пульсации, сигналы на фоне шума и т.п.

Для анализа стохастических ММ необходимо использовать методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики. Однако основная трудность их применения обычно связана с тем, что вероятностные характеристики случайных величин (математические ожидания, дисперсии, законы распределения) часто не известны или известны с невысокой точностью, т.е. ММ не удовлетворяет требованию *продуктивности ММ*. В таких случаях эффективнее использовать ММ, более грубую по сравнению со стохастической, но и более устойчивую по отношению к недостоверности исходных данных.

**Тема 4. «Компьютерное моделирование. Метод конечных элементов»**

**Компьютерное моделирование**

Если модель имеет материальную природу, то для ее создания годятся традиционные инструменты: резец скульптора, токарный или фрезерный станок, пресс, пила и топор, наконец.

Если модель имеет абстрактную форму, то речь идет о некоторых знаковых системах, позволяющих описать данный тип модели. Это специальные языки, чертежи, схемы, графики, таблицы, алгоритмы, математические выражения и т. п. Здесь может быть использовано два варианта инструментария:

* либо традиционный набор конструктора (карандаш, линейка, ручка),
* либо самый совершенный на данный момент инструмент — компьютер.

Инструмент-компьютере работает с информацией. Поэтому нужно исходить из того, какую информацию и в каком виде может воспринимать и обрабатывать компьютер. Современный компьютер способен работать с текстом, графикой, схемами, таблицами, звуком, видеоизображением и т. д. Но для работы со всем этим многообразием информации нужна как ***техническая*** *(****аппаратная****)*, так и ***программная поддержка***. Эти две составляющие и являются *инструментами* *компьютерного моделирования*.

Компьютерное [моделирование](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные [модели](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C) проще и удобнее исследовать в силу их возможности проводить т.н. вычислительные [эксперименты](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82), которые по сравнению с реальным экспериментом затруднены из-за финансовых и физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат.

[Логичность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%BA%D0%B0) и [формализованность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%BC_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) компьютерных моделей позволяет выявить основные факторы, определяющие [свойства](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D0%BE%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) изучаемого объекта - оригинала (или целого класса объектов), в частности, исследовать отклик моделируемой физической системы на изменения ее параметров и [начальных условий](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%8F).

Построение компьютерной модели базируется на [абстрагировании](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) от конкретной природы явлений или изучаемого объекта-оригинала и состоит из двух этапов – сначала создание качественной, а затем и [количественной модели](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C). Компьютерное же моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на [компьютере](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%B5%D1%80), целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта и, при необходимости, дальнейшее уточнение модели.

**Метод конечных элементов**

В науке и технике постоянно приходится сталкиваться с проблемой расчета систем, имеющих сложную геометрическую конфигурацию и нерегулярную физическую структуру. Компьютеры позволяют выполнять такие расчеты при помощи приближенных численных методов. Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из них. В последние десятилетия он занял ведущее положение и получил широкое применение.

**Достоинства МКЭ**

1. Метод конечных элементов позволяет построить удобную схему формирования системы алгебраических уравнений относительно узловых значений искомой функции. Затем производится объединение элементов, что приводит к требуемой системе алгебраических уравнений. Такой алгоритм перехода от отдельного элемента к их полному набору особенно удобен для геометрически и физически сложных систем.

2. Каждое отдельное алгебраическое уравнение, полученное на основе метода конечных элементов, содержит незначительную часть узловых неизвестных от общего их числа. Другими словами, многие коэффициенты в уравнениях алгебраической системы равны нулю, что значительно облегчает ее решение.

3. Метод конечных элементов, так же как и другие численные методы, по существу приближенно заменяет континуальную задачу на дискретную. В методе конечных элементов вся процедура такой замены имеет простой физический смысл. Это позволяет более полно представить себе весь процесс решения задачи, избежать многих возможных ошибок и правильно оценить получаемые результаты.

4. Помимо континуальных задач схема метода конечных элементов применяется для соединения элементов и формирования алгебраических уравнений при решении непосредственно дискретных задач. Это расширяет сферу применения метода.

**Недостаток МКЭ**

Долгое время широкому распространению МКЭ мешало отсутствие алгоритмов автоматического разбиения области на «почти равносторонние» Впрочем, эту задачу удалось успешно решить (алгоритмы основаны на триангуляции Делоне).

**Тема 5. «Моделирование технических объектов**

**обработки металлов давлением»**

**Цель моделирования технических объектов ОМД**

Целью моделирования процессов и машин обработки металлов давлением (ОМД) является воспроизведение и изучение их эксплуатационного поведения с последующей оценкой служебных свойств этих процессов и машин и определения путей их улучшения.

При изучении процессов ОМД это:

− *назначение режимов обработки* (рациональных скоростей деформирования, температур и допустимых степеней деформации);

− *оптимизация технологических процессов* по заданным критериям (минимум затрат материала, минимум энергоемкости технологии и т.п.);

− *определение условий производства*, обеспечивающих бездефектное изготовление штампованных изделий и наибольшую стойкость штампов (смазка, материал инструмента и режим его термообработки и т.п.).

При изучении кузнечно-штамповочных машин это:

− *проверка работоспособности конструктивных схем* КШМ с оценкой основных кинематических и энергетических характеристик (при модернизации существующих машин и проектировании новых КШМ);

− *качественный и количественный анализ нагрузок* в элементах конструкции КШМ при реализации процессов ОМД (для уточнения расчетных схем и разработки методик расчета);

− *оптимизация параметров технических характеристик КШМ* (минимальная материалоемкость, максимальная энергоемкость и т.п.).

**Типы задач моделирования технических объектов ОМД**

Решаемые при моделировании ТО ОМД задачи разделят на два типа.

1. Моделирование ТО для анализа динамики движения.

2. Моделирование ТО для анализа динамики нагружения.

Рассмотрим различие этих задач на примере однокривошипного пресса (см. рис. 1), который имеет открытую двухстоечную станину; двухступенчатый привод с клиноременной передачей «электродвигатель–маховик»; систему включения с фрикционным дисковым узлом «муфта–тормоз» в маховике; четырехзвенный кривошипно-ползунный главный исполнительный механизм, два пневматических цилиндра уравновешивателя, механизм регулировки закрытой высоты и нижний пневматический выталкиватель.

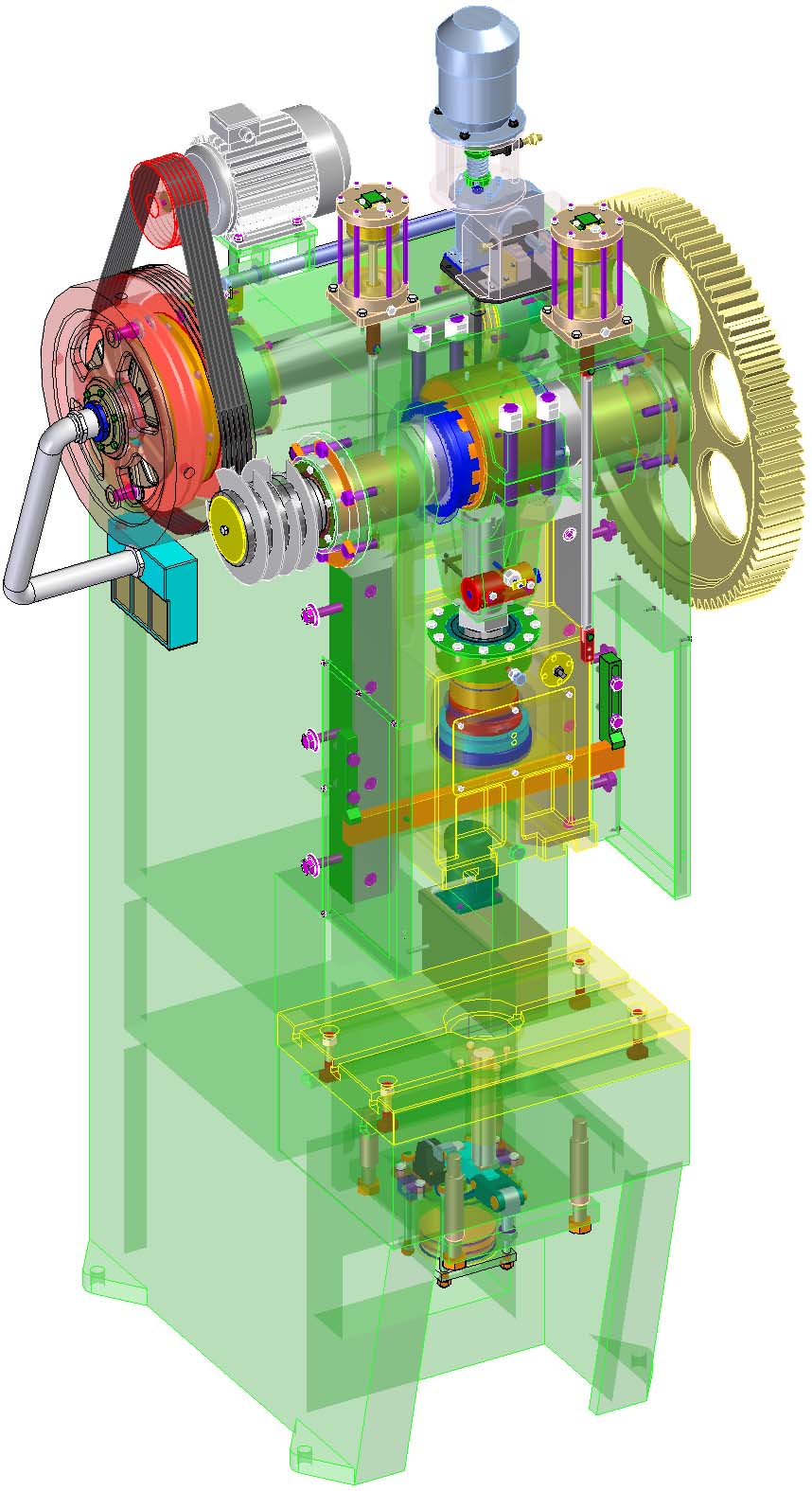


Рис. 1. Однокривошипный пресс с двухступенчатым приводом

Описанной конструкции соответствует структурная схема, показанная на рис. 2.

Для 1-го типа задач такие конструктивные элементы КШМ как шатун, главный и промежуточный вал и т.п. отображают в виде абсолютно жестких связующих элементов (связей). Это означает, что, к примеру, на промежуточном валу угол поворота для сечений *I−I* и *II−II* будет одинаков при воздействии любых внешних крутящих моментах.

Для 2-го типа задач упомянутые конструктивные элементы КШМ отображают в виде упругих или упруго-диссипативных связей. Это означает, что на промежуточном валу углы поворота для сечений *I−I* и *II−II* уже не является одинаковыми при воздействии внешних крутящих моментов.

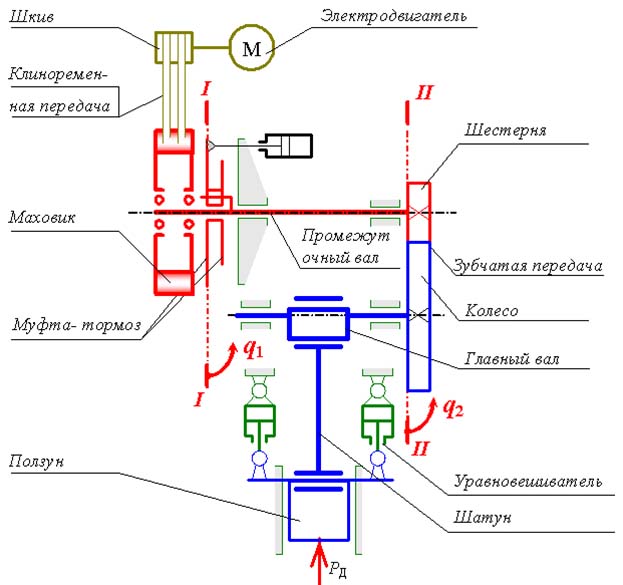


Рис. 2. Структурная схема кривошипного пресса

с двухступенчатым приводом

**Виды моделей связей конструкций технических объектов**

Указанные виды связей характеризуются параметрами (рис. 3):

− линейными *х* и угловыми ϕ перемещениями характерных точек, в которых расположены сосредоточенные массы;

− коэффициентами линейной *С*Х и угловой *С*ϕ жесткости;

− коэффициентами линейной *h*Х и угловой *h*ϕ диссипации.

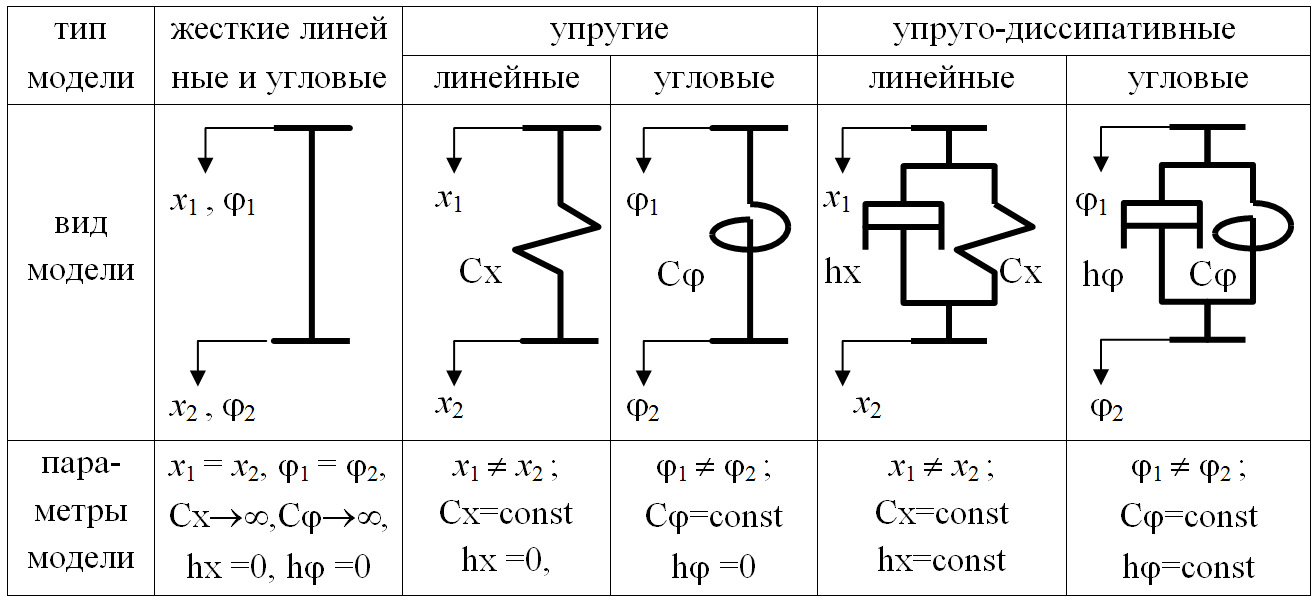


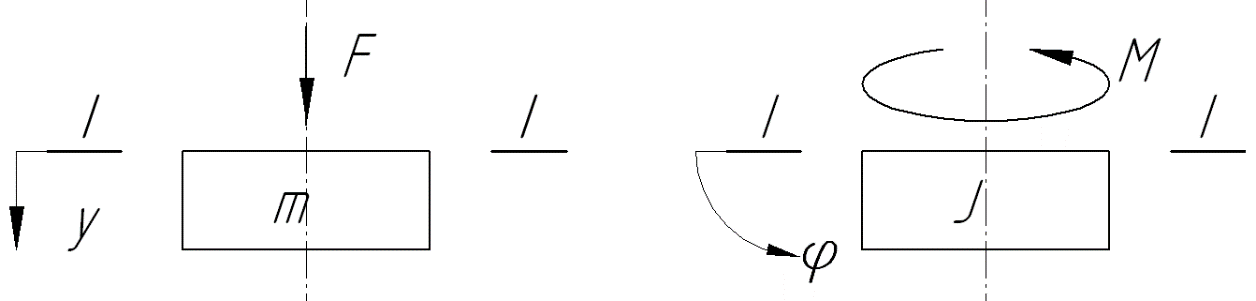
Рис. 3. Виды моделей связей технических объектов

**Моделирование технических объектов ОМД**

**для анализа динамики движения**

Цель решения этого вида задач – определение изменения во времени кинематических и энергетических параметров элементов кинематической цепи ТО на протяжении изучаемого периода его эксплуатации.

Модель объекта при этом является одномассовой для поступательного (рис. 4а) или вращательного (рис. 4б) движения.



а) б)

Рис. 4. Одномассовые модели ТО

для поступательного (а) и вращательного (б) движений

Примером ТО с поступательным движением является пневмомеханическая система пневматического или паровоздушного молота, используемая для разгона подвижных частей молота (баба со штоком и поршнем с суммарной массой  *m*) под действием силы *F* пневматического или паровоздушного цилиндра молота.

Примером ТО с вращательным движением является электромеханическая система винтового или кривошипного пресса, используемая для разгона подвижных частей винтового пресса (маховик с винтом и ползуном с приведенным моментом инерции *J*) или привода кривошипного пресса (маховик с промежуточными валами и зубчатыми передачами с приведенным моментом инерции *J*) под действием крутящего момента *М* электродвигателя главного привода пресса.

Будем считать, что в обоих случаях подвижные части молотов и прессов разгоняются из неподвижного состояния, а сила цилиндра и крутящий момент электродвигателя являются постоянными во времени величинами.

Положение сечений *I*–*I* может быть принято следующим:

― в месте посадки бабы на шток для молотов;

― в месте посадки маховика на винт или вал привода прессов.

Методика моделирования предполагает описание состояния принятых одномассовых моделей движением выделенных элементов с массой *m* и с приведенным моментом инерции *J* с помощью с помощью второго закона [Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD,_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA), записанного в форме [дифференциального уравнения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) для поступательного и вращательного движений:

где  и  означает вторую [производную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) от вертикального перемещения бабы *у* и угла поворота маховика *φ* по времени (линейное и угловое ускорения):

Интегрирование полученных дифференциальных уравнений второго порядка позволяет получить уравнения для расчета линейных и угловых скоростей ( и ) и перемещений (*y* и *φ*) для выделенных элементов с массой *m* и приведенным моментом инерции *J* в сечениях *I*–*I* рассмотренных систем.

Результат моделирования**:**

− переменные во времени значения угловых и линейных скоростей, ускорений и перемещений для выделенных элементов и связанных с ними элементов кинематических цепей рассмотренных технических объектов.

− соответствующие этим скоростям значения кинетической энергии для указанных конструктивных элементов кинематических цепей рассмотренных технических объектов.

**Моделирование технических объектов ОМД**

**для анализа динамики нагружения**

Цель решения этого вида задач – определение изменения во времени внутренних сил и моментов в элементах конструкции ТО на протяжении изучаемого периода его эксплуатации. Рассмотрим в качестве примера изучаемого ТО промежуточный вал двухступенчатого привода кривошипного пресса между маховиком и шестерней зубчатой передачи.

Модель объекта при этом представляет собой несколько выделенных элементов (в нашем случае – два на рис. 5), которые:

− сосредоточены в характерных точках кинематической цепи ТО (в нашем случае – в сечениях *I*–*I* и *II*–*II*);

− учитывают инерционные параметры конструктивных элементов ТО приведенными моментами инерции *J*1 (для сечения *I*–*I*) и *J*2 (для сечения *II*–*II*);

− подвержены воздействию приведенных к сечениям *I*–*I* и *II*–*II* крутящих моментов *М*1 и *М*2;

− соединены невесомыми связями, учитывающими упругие свойства реальных конструктивных элементов кинематической цепи ТО (в нашем случае – коэффициент угловой жесткости при кручении *С* промежуточного вала).

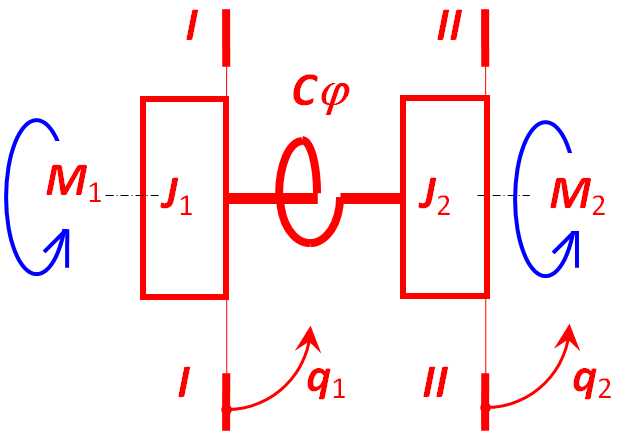


Рис. 5. Двухмассовая модель промежуточного вала

двухступенчатого привода кривошипного пресса

Методика моделирования предполагает получение системы уравнений для расчета ускорений  , ; скоростей  ,; и перемещений  ,  для выделенных элементов (маховика и шестерни) в сечениях *I*–*I* и *II*–*II*. Такую систему можно получить решением уравнений Лагранжа II рода относительно независимых координат *q*1 и *q*2, описывающих их изменения во времени:



где *qj* – *j*-ая обобщенные координаты модели (независимые переменные, определяющие число степеней свободы модели);

*Т* и *П* – кинетическая и потенциальная энергии модели;

*Qj* – обобщенные силы (коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы).

Полученные дифференциальные уравнения интегрируют любым численным методом при нулевых начальных условиях: = 0 при *t* = 0.

Силовые параметры *М*1 и *М*2, указанные для модели на рис. 2, это:

*М*1, *М*2 –активный момент и момент сил сопротивления в приводе пресса, приведенные к выделенным сечениям его кинематической цепи.

Инерционные параметры *J*1 и *J*2, указанные для модели, это:

*J*1, *J*2 – моменты инерции подвижных элементов конструкции пресса приведенные к выделенным сечениям его кинематической цепи.

Результат моделирования:

− переменные во времени значения скоростей, ускорений и перемещений для выделенных элементов ТО и всех связанных с ними конструктивных элементов его кинематической цепи;

− соответствующие этим скоростям значения кинетической энергии для указанных конструктивных элементов кинематической цепи;

− переменные во времени значения упругих сил и моментов, возникающих внутри конструктивных элементов кинематической цепи пресса;

− соответствующие упругим силам и моментам значения потенциальной энергии для конструктивных элементов кинематической цепи пресса.

**Тема 6. «Инерционные, силовые и упругие свойства**

**моделей** **технических объектов»**

**Инерционные параметры и порядок их приведения**

Рассмотрим порядок приведения инерционных параметров для задачи моделирования пресса по рис. 1,2 для анализа динамики движения.

Инерционные параметры пресса – это:

* вращающиеся части с моментами инерции *J*;
* поступательно движущиеся части с массами *m*.

Инерционные параметры модели (рис. 3б) − вращающий в сечении *I−I* элемент с приведенными моментами инерции *J*, учитывающий инерционные свойства всех вращающихся и поступательно движущихся частей пресса до и после сечения *I−I*.

Приведение инерционных параметров основано на условии баланса кинетической энергии, то есть: суммарная кинетическая энергия всех движущихся частей кривошипного пресса должна быть равна полной кинетической энергии всех инерционных параметров модели:

*Т*П = *Т*М.

Для пресса суммарная кинетическая энергия *Т*П его вращающихся и поступательно движущихся частей определяется их угловыми *w* и линейными *v* скоростями, моментами инерции *J* и массами *m*.

Для модели полная кинетическая энергия определяется приведенным моментом инерции *J* одного элемента, вращающегося в сечении *I−I* с угловой скоростью, равной скорости вращения промежуточного вала *w*ПВ в точке, принадлежащей сечению *I−I*. Таким образом, для модели:

.

Из условия баланса энергии для модели и пресса *Т*М = *Т*П получают зависимость, определяющую приведенный момент инерции выделенного элемента:



где i – передаточные числа кинематических связей между элементами пресса.

**Силовые параметры и порядок их приведения**

Силовые параметры пресса − это активный крутящий момент электродвигателя МЭ и момент сопротивления МГИМ на выходном звене главного исполнительного механизма пресса, который создается силой деформирования на ползуне *Р*Д и учитывает трение в кинематических парах ГИМ.

Силовые параметры модели − это приведенный к сечению *I−I* крутящий момент *М*ПР, учитывающий действие указанных выше моментов *М*Э и *М*ГИМ .

В качестве элемента приведения силовых параметров пресса также принимается выделенная масса, вращающаяся в сечении *I−I*.

Приведение силовых параметров основано на условии баланса работ, то есть: суммарная работа воздействующих на звенья машины крутящих моментов и сил должна быть равна работе приведенного к характерному сечению модели крутящего момента или силы.

Для пресса суммарная работа АП активного момента электродвигателя МЭ и момента сопротивления МГИМ определяется их величинами и угловыми перемещениями ротора электродвигателя ϕЭ и выходного звена главного исполнительного механизма ϕВ :

 .

Для модели работа *А*М приведенного к сечению *I−I* момента *М*ПР определяется его величиной и угловым перемещением ϕПВ :

.

Из условия баланса работ для модели и пресса *А*М = *А*П получим равенство, которое преобразуется в дальнейшем с учетом передаточных отношений для кинематических пар пресса *i*РП = ϕЭ/ϕПВ и т.д.

Крутящий момент электродвигателя *М*Э определяется его электромеханической характеристикой:

.

где: ε, εН, εК − текущее, номинальное и критическое значения скольжения для электродвигателя. При этом для рабочей области характеристики:

, , ;

а кратность критического и номинального моментов равна: λК = *М*К / *М*Н .

Полученные зависимости определяют искомое выражение для приведенного момента *М*ПР.

**Упруго-диссипативные свойства и порядок их приведения**

Под действием внешних силовых факторов (сил *Р* или крутящих моментов *М*) в звеньях КШМ возникает упругая деформация (линейная "х" или угловая "ϕ"). Один и тот же силовой фактор может вызвать большую или меньшую деформацию звена. Ее величина зависит от его коэффициента жесткости (линейной Сх или угловой Сϕ), под которым понимают отношения:



Величину, обратную коэффициенту жесткости, называют коэффициентом податливости**:** *е* = *С* −1 .

Связь упругой деформации звена (х, ϕ) и вызвавшей ее нагрузки (Р, М) представлена на рис. 6 и может иметь линейный характер – 2 (для металлов в области упругих деформаций), быть убывающей функцией – 3 (для полимеров) или возрастающей функцией – 1 (для резины).

В реальных условиях упругие свойства звеньев КШМ не являются строго линейными, а описываются кривыми 4 с «завалом» вблизи начала координат.

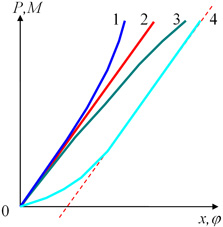


Рис. 6. Связь упругих деформаций и нагрузок

Это объясняется наличием зазоров в кинематических парах прессов, а также увеличением контактной жесткости в высших кинематических парах (шаровых шарнирах, подшипниках качения и т.п.) при нагружении за счет роста площади контакта при увеличении внешней нагрузки.

Коэффициенты линейной и угловой жесткости для вала:

,

где: *Е* и *G* – модули упругости и сдвига для материала звена;

*S* и *J*О – площадь поперечного сечения и полярный момент инерции

сечения для нагруженного участка вала;

 – длина нагруженного участка вала.

Упругие элементы в прессе могут располагаться параллельно (рис. 7а) или последовательно (рис. 7б).

Приведение параметров упругости выполняют по следующему принципу:

* для параллельно расположенных упругих элементов находят приведенный коэффициент жесткости *С*ПР = *С*1 + *С*12+…+ *СJ*, ,
* для последовательно расположенных упругих элементов находят приведенный коэффициент податливости *е*ПР = *е*1 + *е*2 +…+ *еJ* .

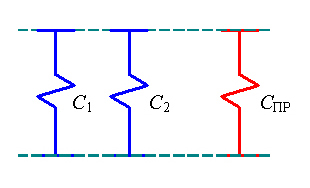
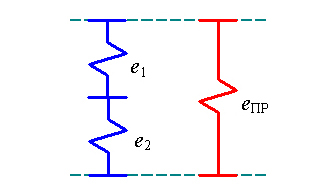
а)б)

Рис. 7. Параллельное и последовательное расположение упругих элементов

Если для звена принята упругая модель, то возникающие в нем восстанавливающие силы будут и при разгрузке изменяться по тому же закону. В реальных условиях график восстанавливающих сил отличается от графика нагружения и они образуют петлю (рис. 8). При этом 1 – кривая нагружения, а 2 – кривая разгрузки. Площадь петли пропорциональна работе, затраченной за цикл на преодоление сил неупругого сопротивления, то есть энергии рассеяния.

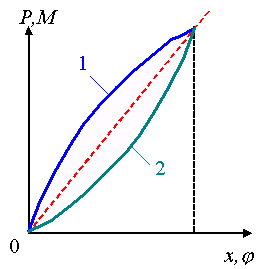


Рис. 8. Изменение восстанавливающих сил:

1 – при нагружении, 2 – при разгрузке

Рассеяние (диссипация) энергии вызвана двумя факторами: конструкционным демпфированием (трением при колебаниях в неразъемных соединениях) и внутренним трением в материале звеньев при их упругой деформации.

Отношение энергии рассеяния (площади петли) к работе, затраченной на деформацию звена при нагружении (площадь фигуры между кривой 1 и осью абсцисс), называется коэффициентом рассеяния или коэффициентом диссипации и обозначается *h*х или *h*ϕ.

**Тема 7. «Частные закономерности моделирования**

**кузнечно-штамповочных машин»**

**Свойства динамической системы кузнечно-штамповочной машины**

Кузнечно-штамповочная машина (КШМ) является динамически возбуждаемой системой. Силы, возникающие при ее работе, характеризуются значительной скоростью изменения как при их нарастании, так и при уменьшении, и потому являются источником сильного динамического возбуждения. Динамическая составляющая процессов, протекающих в КШМ, значительна, а часто и преобладает над статической. Рабочие нагрузки, возникающие при работе машины, в значительной мере определяют ее надежность и долговечность.

Поэтому возможность достоверного предсказания процессов в проектируемых КШМ дает возможность выявить влияние тех или иных факторов на уровень нагрузок, существенно снизить их и повысить на этой основе надежность и долговечность машин.

Динамическая система КШМ отличается большим количеством отдельных масс, каждая из которых благодаря упругости связей с другими массами при работе машины движется самостоятельно. Поэтому динамическая система КШМ отличается большим числом степеней свободы, т. е. многомассовостью.

Число степеней свободы КШМ может достигать десятков и сотен единиц и быть переменной величиной. Поведение масс и упругих элементов подчиняется простым физическим законам (Ньютона, Гука, Кулона и др.). Однако в конкретной КШМ, характеризующейся своей индивидуальной структурой, многократное проявление этих законов и их взаимодействие приводят к высокой сложности, неочевидности и плохой предсказуемости протекающих в машине процессов и ее свойств.

Ситуация усугубляется наличием в составе динамической системы КШМ элементов с существенной нелинейностью характеристик. Это, например, зазоры в кинематических парах, силы Кулонова трения и др. Эти элементы, являясь дополнительными источниками динамических возбуждений, делают систему нелинейной, что вместе с большим числом степеней свободы создает значительные трудности математического (вычислительного) характера для анализа процессов, протекающих в КШМ.

Это приводит к необходимости проведения исследований, которые обычно носят характер предпроектных исследований. В данном случае исследование и проектирование разделены во времени и являются самостоятельными мало связанными между собой процессами.

Ситуация меняется, если исследования сделать составной частью процесса проектирования КШМ. Такие возможности предоставляет математическое моделирование работы КШМ. Получаемые при этом результаты исследования будут относиться к данному объекту проектирования, отражать его специфику и являться надежной основой для повышения качества проектирования.

Примером неудачного решения задачи проектирования КШМ является создание конструкции специального КГШП для штамповки осадкой с кручением. Специфика этого способа деформирования предполагает одновременное сообщение верхнему инструменту поступательного и вращательного движений.

В качестве пресса-аналога был выбран КГШП двойного действия модели К8037 Воронежского завода ТМП (рис. 10а). Основой доработки конструкции главного исполнительного механизма (ГИМ) пресса явилась дополнительная связь внутреннего и наружного ползуна с помощью винтовой пары (рис. 10б).

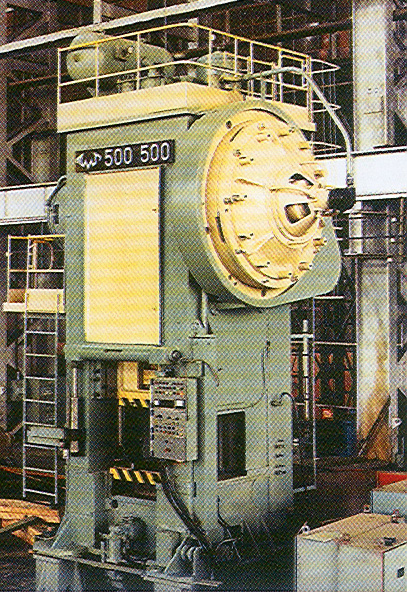
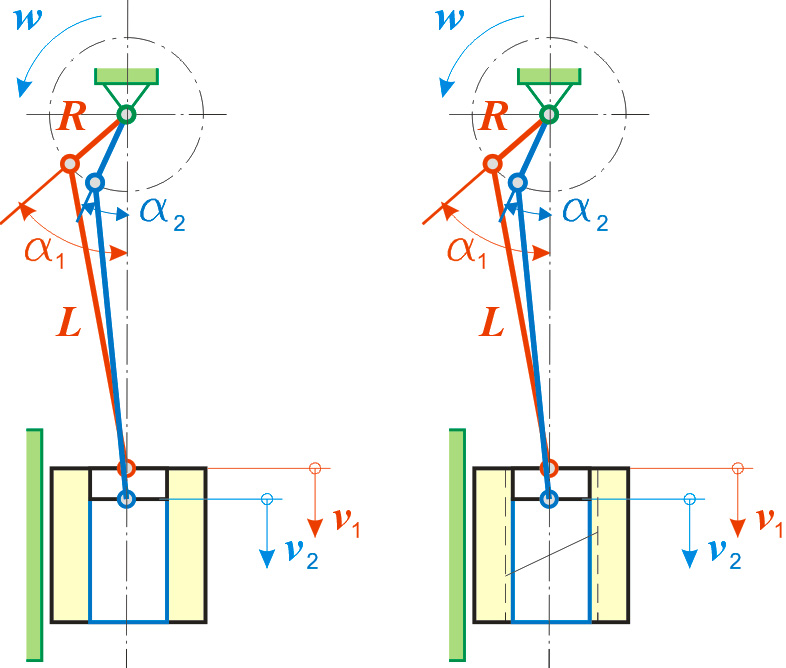
 а)б)

Рис. 10. Общий вид (а) и схемы ГИМ пресса-аналога модели К8037

и специального КГШП для осадки с кручением

«Анализ» (как составной элемент проектной процедуры) включал только кинематические и статические расчеты. Динамический анализ конструкции не проводился. Результатом явился обрыв одного из шатунов в процессе испытаний пресса.

Причина поломки была выяснена динамическим анализом конструкции спроектированного пресса, проведенным позднее с помощью программного комплекса ПА6 (предшественник современного ПА9), а именно: специфический характер распределения нагрузок в ГИМ пресса после введения в его состав винтовой пары.

**Методы и средства синтеза математических моделей**

**кузнечно-штамповочных машин**

Большинство (до 90 %) задач анализа работы КШМ можно решить, считая динамическую систему пресса системой с сосредоточенными параметрами.

Для этого случая ММ КШМ должна быть представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отражающих существенные, с точки зрения проектировщика, свойства машины, для решения которых можно использовать один из известных методов интегрирования.

Наиболее распространенный способ получения (синтеза) ММ в таком виде основан на использовании уравнения Лагранжа II рода.

*Недостатки* данного способа:

* трудоемкость разработки ММ, резко возрастающая по мере отражения в модели большего числа свойств объекта,
* трудоемкость модификации модели, неизбежная при поиске структурного варианта объекта проектирования,
* плохая обозримость соответствия элементов ММ элементам объекта проектирования.

В настоящее время получили развитие методы и средства автоматизации синтеза и реализации ММ. К таким средствам относятся программные комплексы (ПК) для анализа динамических систем с сосредоточенными параметрами - ПА6, ПА7, Pradis, ПА9, Adams, Dames и др.

Все названные комплексы близки между собой по выполняемым функциям и привлеченным методам обработки данных. В дальнейшем в целях конкретизации автоматизацию проектирования КШМ будем рассматривать применительно к ПК ПА9.

**Тема 8. «Моделирование технических объектов**

**в программном комплексе ПА9»**

**Общая характеристика и адаптация**

Программный комплекс (ПК) ПА9 предназначен для анализа динамики сложных технических объектов смешанной физической природы.

Комплекс ориентирован на системы с сосредоточенными параметрами любой физической природы и инвариантен к предметным областям. Для возможности использования ПК должен быть адаптирован к конкретной предметной области, в данном случае к области проектирования КШМ. Адаптация ПК осуществляется разработкой ММ элементов, характерных для данной предметной области, и включением их в библиотеку ММ элементов комплекса.

**Библиотека математических моделей**

В ПК ПА9 в качестве объектов для разработки библиотеки ММ элементов (ММЭ) выбраны типовые конструктивные элементы КШМ.

Состав библиотеки ММЭ кривошипных прессов с указанием их имен приведен в рекомендованной литературе [4].

В состав библиотеки входят:

* простейшие динамические элементы – инерционная масса, тяготеющая масса, упругость линейная и угловая, трение вязкое, постоянные и управляемые источники сил и моментов, постоянные и управляемые источники скорости и др.;
* элементы механических систем – двигатели постоянного и переменного тока, винтовые, фрикционные, ременные и зубчатые передачи, шарниры, стержни и балки, шлицевые соединения, фрикционные дисковые муфты и тормоза, технологические нагрузки и др.;
* элементы пневматических систем – источник рабочего тела, ресивер, местное пневматическое сопротивление, клапаны обратный и предохранительный, распределитель трехлинейный, цилиндры и др.;
* элементы гидравлических систем – насос-гидромотор, местное гидравлическое сопротивление, аккумулятор газогидравлический, клапаны обратный и предохранительный, распределитель трехлинейный, цилиндры и др.;
* элементы логических систем – кнопка включения, концевой выключатель, реле давления, триггер и др.

Имя ММЭ в виде цепочки символов латиницы, например DVPBTU, используется для употребления в текстах описаний в виде ссылок на модель.

Другим именем ММЭ является содержательный графический образ, который служит для обращения к ММЭ.

**Порядок синтеза математических моделей**

ПК ПА9 выполняет две основные функции:

1. синтез ММ объекта в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений по *исходному описанию* объекта;
2. решение ММ выбранным методом интегрирования с представлением результатов графиками изменения переменных во времени и таблицами.

Качественная определенность объекта задается его структурой, количественная - значениями параметров элементов. Структура объекта отражается в топологии модели назначением состава элементов и указанием *связей* между ними. Соединения полюсов моделей образуют узлы топологии.

В ПК ПА9 используется *метод узловых потенциалов,* или *узловой метод* *синтеза ММ.*

В каждый момент процесса интегрирования состояние каждого узла топологии определяется *фазовой переменной типа потенциала,* а состояние каждого полюса модели - *фазовой переменной типа потока.*

Фазовая переменной типа потенциала — такая переменная, для которой справедлив второй закон Кирхгофа или его аналог в системе иной физической природы (табл. 1).

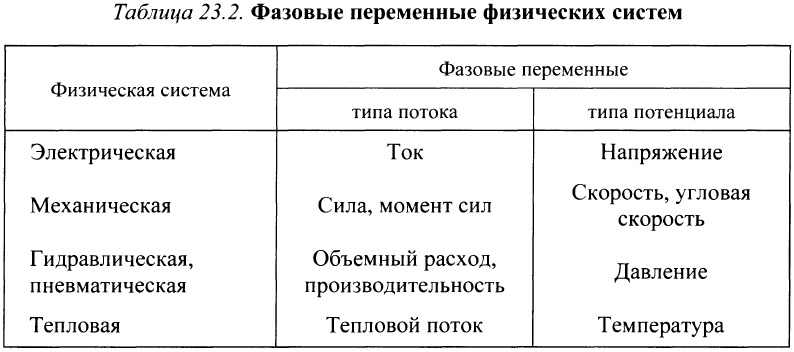
Для электрических систем фазовая переменная типа потенциала – это электрическое напряжение Аналогом второго закона Кирхгофа в механических системах является закон сложения скоростей, согласно которому в любой системе тел сумма разностей скоростей между любыми двумя телами равна нулю, если при переходе от одного тела к другому мы возвращаемся к исходному.

В узловом методе формирования ММ определяемыми на каждом шаге интегрирования *являются узловые потенциалы.*

Фазовая переменная типа потока — такая переменная, для которой справедлив первый закон Кирхгофа или его аналог в системе иной физической природы (см. табл. 1). Для электрических систем фазовая переменная типа потока представляет собой электрический ток. Аналогом первого закона Кирхгофа в механических системах является закон равновесия сил (включая силы Д'Аламбера), приложенных к какому-либо телу.

Согласно узловому методу, вычислительное ядро ПК назначает для каждого узла топологии значение фазовой переменной типа потенциала из условия равенства нулю невязки в каждом узле. Невязка равна сумме фазовых переменных типа потока во всех полюсах моделей, соединение которых образовало узел топологии. Равенство нулю невязки является выражением первого закона Кирхгофа или его аналога в системе иной физической природы. В механических системах равенство нулю невязки является выражением *условия равновесия сил*, в гидравлических и пневматических– *условия неразрывности среды*.

*Таблица 1.* Фазовые переменные физических систем



Результатом синтеза ММ объекта проектирования является система обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемая без непосредственного участия пользователя и скрытая от него.

Порядок системы уравнений определяется числом узлов топологии. Методы синтеза ММ и ее решения инвариантны по отношению к физической природе объекта. Поэтому в ММ объекта проектирования могут быть представлены входящие в состав объекта механические, электрические, гидравлические, пневматические, информационные подсистемы, а также их совокупность.

Система дифференциальных уравнений решается одним из методов интегрирования по выбору пользователя. Библиотека методов интегрирования ПК ПА9 в состоянии поставки содержит неявный метод Эйлера (1-го порядка) и метод трапеций. Библиотека открыта для включения в нее иных методов интегрирования.

**Разработка топологии модели технического объекта**

Работа в ПК ПА9 осуществляется с помощью схемного графического редактора, в котором создают исходное описание объекта проектирования и задание на расчет, а также указывают объем вывода результатов.

Окно схемного графического редактора открывается при загрузке комплекса и содержит поле схемы с сеткой и главное меню («Файл», «Вид/Правка», «Окно», «Команды»).

Топологию ММ создают размещением на поле схемы графических образов ММЭ и назначением связей между ними.

Размещение элементов осуществляют с привязкой к сетке поля схемы. Связи между элементами создают соединением полюсов моделей.

Каждый полюс ММЭ механической природы соответствует одной из координат одно-, двух- или трехмерного геометрического пространства. В соединении полюсов участвуют полюса одной и той же координаты.

Образующийся при этом узел соответствует той же координате геометрического пространства. Полюса ММЭ электрической, гидравлической, пневматической природы и логических элементов соответствуют входам и выходам самих элементов.

Для элементов пневматической природы каждому входу (выходу) элемента соответствует пара полюсов: «гидравлический» и тепловой.

Степень подробности представления структуры объекта в его ММ определяется характером решаемой расчетной задачи.

**Описание параметров библиотечных моделей**

Количественная определенность объекта проектирования задается значениями параметров элементов. Окно параметров открывается щелчком ЛКМ по графическому образу ММЭ. Созданное таким образом описание ММЭ объекта проектирования достаточно для ее реализации.

Для примера на рис. 11 показана схема двухступенчатого привода открытого однокривошипного пресса простого действия, а на рис. 12 – выборочные библиотечные модели ПК ПА9 для характерных элементов этого привода.

Топология ММ указанного привода для анализа его кинематических и энергосиловых параметров показана на рис. 13.

При этом для указанных на рис. 12 библиотечных моделей ПК ПА9 и элементов конструкции привода пресса имеется следующее соответствие:

* для силовой электрической сети — модель “V” (источник электрического напряжения, рис. 12а);
* для электродвигателя главного привода пресса — модель “DVA” (двигатель переменного тока асинхронный односкоростной, рис. 12б);
* для ременной передачи — модель “RР” (ременная передача, рис. 12в);
* для узла «муфта-тормоз» — модели “MUFTA” и “TORMOZ” (муфта и тормоз дисковые фрикционные с пневмоприводом, рис. 12г и рис. 12д);
* для кнопки включения узла «муфта-тормоз» — модель “VU” (управляемый источник скорости, рис. 12е) с функцией «трапецеидальный источник сигнала» (рис. 12ж);
* для промвала — две модели “М” (момент инерции, рис. 12з), отображающие инерционные свойства левой и правой частей вала;
* для промежуточного вала — модель “К” (упругость линейная, рис. 12и), отображающая упругие свойства вала;
* для зубчатой передачи — модель “RDN” (зубчатая передача внешнего зацепления, рис. 12к);
* для ведомого приводом главного исполнительного механизма (ГИМ — главный вал с шатуном и ползуном) — модель “М” (момент инерции, рис. 12з).

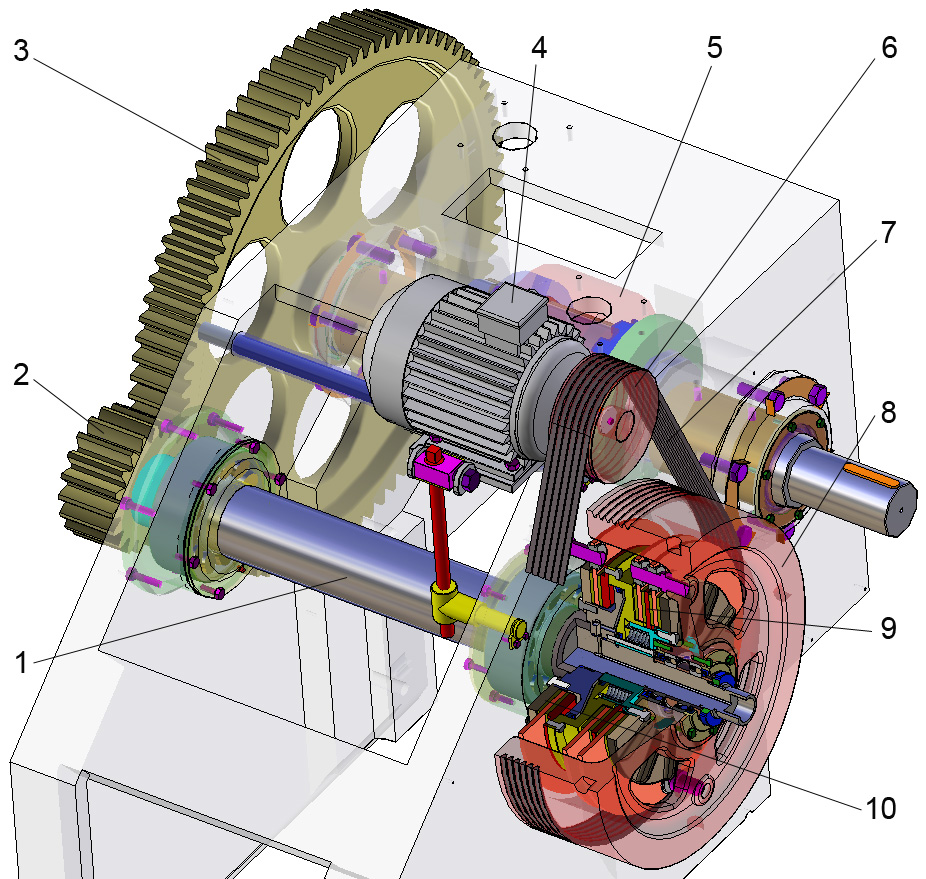
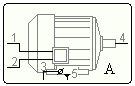
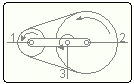
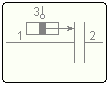
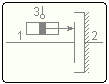


Рис. 11. Схема конструкции двухступенчатого привода

1 – вал промежуточный; 2,3 – шестерня и колесо зубчатой передачи;

4 – электродвигатель; 5 – вал главный; 6 – шкив; 7 – ремни клиновые;

8 – маховик; 9 – муфта; 10 – тормоз.

а) б) в) г) д)

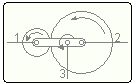
е) ПА9_Сигнал трапецеидальныйж) з) и) к)

Рис. 12. Выборка библиотечных моделей ПК ПА9:

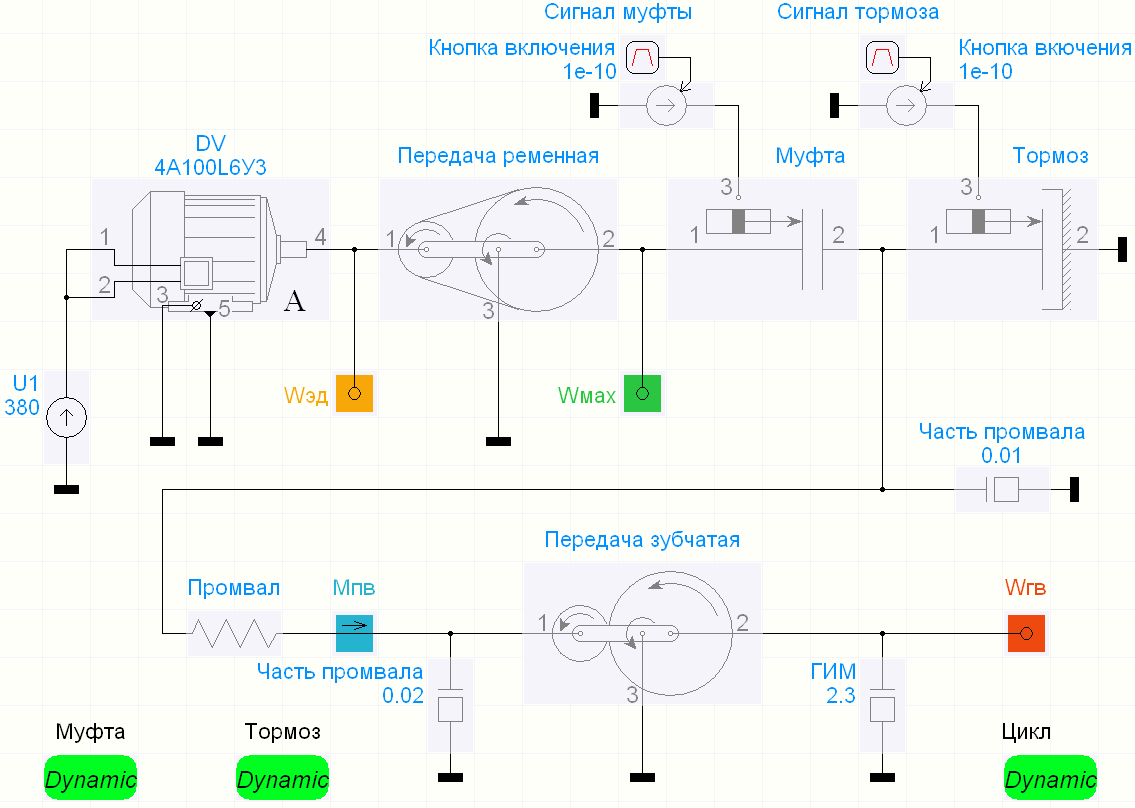


Рис. 13. Топология модели двухступенчатого привода

**Операторы управления, индикаторы и комментарии**

Задание на расчет состоит из одного или нескольких операторов, чаще всего динамического анализа – операторы “Dynamic” на рис. 13. В последнем задают метод интегрирования и параметры управления вычислительными процессами: модельное время; минимальный, максимальный и стартовый шаги интегрирования; точность интегрирования и др.

Для вывода переменных служат индикаторы. Индикаторы фазовых переменных типа потенциала и интеграла фазовой переменной типа потенциала присоединяют к соответствующему узлу топологии. Индикаторы фазовых переменных типа потока включают в разрывы связей топологии.

На графиках, полученных в результате моделирования (рис. 14), переменные выводятся в функции времени. ПК ПА9 позволяет представить переменные в функции любой другой переменной, имеющейся на графике. Это позволяет без дополнительных затрат времени получать интересующие проектировщика графики, например индикаторные диаграммы работы молотов.

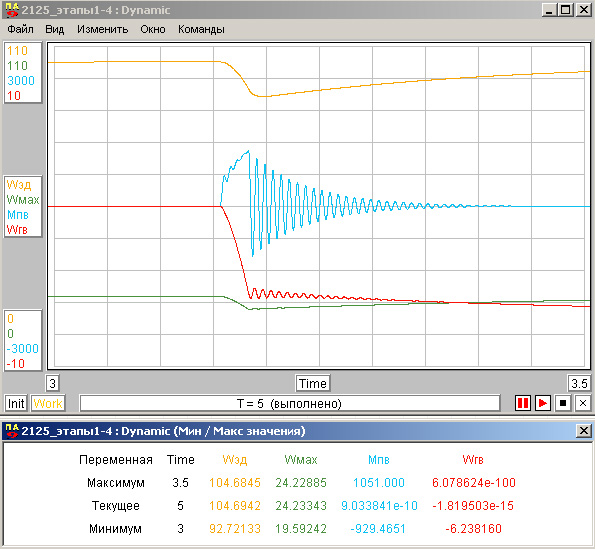


Рис. 14. Результат анализа работы привода при срабатывании муфты

ПК ПА9 предусматривает возможность определения так называемых *расчетных переменных,* которые по своей природе не являются фазовыми (например, энергетические показатели, напряжения в деталях и др.), но представляют интерес для проектировщика. Вывод расчетных переменных осуществляют с помощью универсальных индикаторов, свободно размещаемых на поле схемы без привязки к другим элементам. Для индикатора задают цвет кривой на графике, значения переменной на верхней и нижней осях графика или включают режим автокорректировки пределов. Для универсального индикатора указывают расчетную переменную, которую необходимо определить. Окно атрибутов индикатора открывается, если щелкнуть по изображению оператора.

**Средства анализа результатов моделирования**

Результаты расчета представляются в виде графиков (рис. 14) и массивов числовых значений переменных.

На получаемых графиках для каждой переменной указано ее название, выбранное пользователем, а также значения на верхней и нижней осях графика.

Сама кривая, ее название и значения на осях графика имеют одинаковый цвет, установленный пользователем. Числовые значения переменных можно определить для любой точки любого графика с помощью курсора.

Анализ графиков изменения выходных параметров для отрезка времени работы привода — «муфта» (рис. 14) показывает следующее:

* включение муфты вызывает интенсивные колебания крутящего момента на промежуточном валу с ростом момента в положительном направлении, и сопровождается нагружением вала в знакопеременном цикле;
* продолжительность интенсивных колебаний вала при включении муфты составляет ориентировочно 0.2с (от 3.2с до 3.4с — рис. 9.5).

Предельные значения исследуемых величин выведены под графиками в форме таблиц с числовыми значениями (рис. 14).

**Использованные и рекомендуемые источники**

1. Власов А.В., Горьков М.А. Математическое и физическое моделирование процесса зафланцовки деталей из алюминиевых сплавов: http://technomag.edu.ru/doc/44710.

2. Математическое моделирование. /Новая лаборатория автоматизации: <http://www.automationlab.ru/index.php/2011-06-26-21-10-36/>.

3. Википедия: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>.

4. Складчиков Е.Н. Библиотека моделей программного комплекса ПА9. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2006. 62 с., ил.